

интегрирования и предназначен для расчета переходных процессов в линейных электротехнических системах.

2. Предложенный метод является дальнейшим развитием классических методов расчета переходных процессов в линейных системах. Достоинством этого метода является возможность оценки вклада каждого собственного числа системы дифференциальных уравнений в формирование свободной составляющей переходного процесса, а также отсутствие необходимости в определении производных от переменных системы для нахождения постоянных интегрирования.

#### Перечень ссылок

1. Теоретические основы электротехники. Т.2 / К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л.Чежулин. – СПб.: Изд-во «Питер», 2003. – 576 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Изд-во «Гардарики», 2000. – 638 с.
3. Руководящие указания по расчету токов короткого замыкания и выбору электрооборудования / Под ред. Б.Н.Неклепаева. – М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2004. – 152 с.

4. Куликов Ю.А. Переходные процессы в электрических системах. – Новосибирск: НГТУ, М.: Мир: ООО «Изд-во АСТ», 2003. – 283 с.
5. Символьный анализ и диагностика линейных электрических цепей методом схемных определителей / С.А.Курганов, В.В.Филаретов. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2003. – 228 с.
6. Семенов М.Г. Введение в математическое моделирование. М.: Изд-во «Солон-Р», 2001. – 112 с.
7. Тиховод С.М. Моделирование динамических электромагнитных процессов в трансформаторе с современной электротехнической сталью // Электротехника та електроенергетика. – 2006. – № 1. – С.37–41.
8. Костюков В.В. Связь между постоянными интегрирования при анализе переходных процессов в линейных электрических цепях // Вестник СевНТУ. Вып. 55: Механика, энергетика, экология: Сб. науч. тр.; Севастоп. нац. техн. ун-т. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. – С.80–86.

*Поступила в редакцию 30.05.06 г.,*

*После доработки 15.04.07 г.*

*Пропонується метод, призначений для численно-аналітичного моделювання перехідних процесів у лінійних електротехнічних системах. Метод ілюструється прикладом моделювання перехідного процесу короткого замикання в системі.*

*The method, intended for numerically-analytical modelling of transients in single-line electro-technical system are offered.. The method is illustrated by modelling of two-phase short circuit transients in the system.*

УДК 621.314.322.001.6: 519.872: 519.622.2

С. М. Тиховод

## Совершенствование численных методов расчета электромагнитных процессов в сложных нелинейных электрических и магнитных цепях

*Разработаны усовершенствованные методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений, предназначенные для моделирования динамических электромагнитных процессов в электрических и магнитных цепях. Данные методы внедрены в универсальный программный комплекс COLO, с помощью которого выполнен пример расчета переходных процессов в трехфазном трансформаторе.*

При моделировании электромагнитных процессов в сложных электротехнических устройствах существует необходимость составления и численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. Порядок (т. е. содержащееся в них количество уравнений) этих систем может достигать нескольких сотен. Для моделирования таких процессов широко используются известные программные комплексы: NAP, PSpice, OrCAD, Simulink, Colo и другие [1-5]. Указанные программы по исходным данным, описывающим электрическую цепь, автоматически составляют систему дифференциальных уравнений и с помощью встроенного решателя производят численное интегрирование составленной

системы уравнений. Решатели, включенные в указанные программные комплексы, как правило, предоставляют возможность выбора одного из нескольких известных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Наиболее распространенными методами численного интегрирования дифференциальных уравнений являются методы Рунге-Кутты, Хемминга, Адамса, Башфорта, Маултона, Гира [6]. Однако, применение этих методов для численного интегрирования систем дифференциальных уравнений высокого порядка зачастую приводит к значительным затратам компьютерного времени или к расходимости вычислительного процесса.

Целью статьи является создание усовершенствованных методов численного интегрирования систем дифференциальных уравнений, позволяющих моделировать динамические процессы в сложных нелинейных электрических и магнитных цепях с сокращением затрат компьютерного времени при устойчивом характере сходимости вычислительного процесса.

Как известно, дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами могут быть получены на основании законов Кирхгофа, записанных в форме для мгновенных значений. Уравнения, описывающие электрические процессы в сложных электрических цепях, составляются, как правило, не вручную, а программным способом по специальным алгоритмам. Например, в работе [5] применен алгоритм составления уравнений Кирхгофа с помощью автоматического построения дерева цепи.

Для упрощения изложения сущности предложенных методов рассмотрим их на примере анализа решения одного дифференциального уравнения (1):

$$\alpha x' + \beta x = f(t), \quad (1)$$

определенного в области  $t_1 \leq t \leq t_N$ ,

где  $x(t)$  – может быть функцией от времени, напряжения на емкостном элементе или от тока, протекающего через индуктивный элемент. Таким образом,  $x(t)$  – переменная состояния электрической цепи, а  $x'$  – производная функции  $x(t)$  по времени.

Допустим, что производную решения можно аппроксимировать полиномом степени  $N-1$ . При  $N=4$  полином имеет вид:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = p(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3. \quad (2)$$

Интервал изменения аргумента разобьем на одинаковые отрезки длиной  $h$  точками  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Для аппроксимирующего полинома (2) поставим дополнительное условие, чтобы в точках  $t_k$  деления интервала изменения аргумента выполнялись соотношения:

$$x'(t_k) = x'_k = p(t_k) \quad (3)$$

для  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Если соотношение (3) записать для каждой точки  $t_k$  рассмотренного временного интервала, то для  $N=4$  получим систему линейных алгебраических уравнений (если принять, что  $t_1 = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= x'(t_1), \\ a_1 + a_2 h + a_3 h^2 + a_4 h^3 &= x'(t_2), \\ a_1 + a_2 (2h) + a_3 (2h)^2 + a_4 (2h)^3 &= x'(t_3), \\ a_1 + a_2 (3h) + a_3 (3h)^2 + a_4 (3h)^3 &= x'(t_4), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Пусть номер  $k$ -ого отрезка, на которые разделен интервал изменения аргумента, совпадает с номером точки деления  $t_k$ , расположенной слева отрезка. Проинтегрируем выражение (2) на  $k$ -ом отрезке:

$$x_{k+1} - x_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(t) dt. \quad (5)$$

Подставив выражение (2) в зависимость (5) и выполнив интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \frac{a_1}{1} (t_{k+1} - t_k) + \frac{a_2}{2} (t_{k+1}^2 - t_k^2) + \\ &+ \frac{a_3}{3} (t_{k+1}^3 - t_k^3) + \frac{a_4}{4} (t_{k+1}^4 - t_k^4), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k=1 \dots N-1$ .

Если уравнение (6) записать для всех  $N$  точек, то получим систему алгебраических уравнений при  $N=4$ :

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{a_1}{1} h + \frac{a_2}{2} h^2 + \frac{a_3}{3} h^3 + \frac{a_4}{4} h^4, \\ x_3 - x_2 &= \frac{a_1}{1} h + \frac{a_2}{2} 3h^2 + \frac{a_3}{3} 7h^3 + \frac{a_4}{4} 15h^4, \\ x_4 - x_3 &= \frac{a_1}{1} h + \frac{a_2}{2} 5h^2 + \frac{a_3}{3} 19h^3 + \frac{a_4}{4} 65h^4. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Системы алгебраических уравнений (4) и (7) объединим в одну систему из семи уравнений. Из полученной системы последовательно исключим пять переменных:  $a_1, a_2, a_3, a_4, x'_1$ . В результате получим систему двух уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{8}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_1 + \left( \frac{17}{27} x'_2 + \frac{14}{27} x'_3 - \frac{1}{27} x'_4 \right) \cdot h, \\ x_4 &= x_3 + \frac{1}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_1 + \left( \frac{8}{27} x'_2 + \frac{22}{27} x'_3 - \frac{10}{27} x'_4 \right) \cdot h. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Первое уравнение системы (8) неудобно для практических расчетов, так как в последней точке  $t_4$  присутствует не само решение, а только производная решения. Второе уравнение представляется более удобным, если считать, что  $x_4$  – искомое значение функции в  $k$ -ой точке,  $x_3$  – известное значение функции в предыдущей  $(k-1)$ -й точке и т. д. Тогда второе уравнение системы (8) примет вид:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + \frac{1}{9} x_{k-2} - \frac{1}{9} x_{k-3} - \left( \frac{8}{27} x'_{k-2} - \right. \\ &\left. - \frac{22}{27} x'_{k-1} - \frac{10}{27} x'_k \right) \cdot h. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) позволяет вычислить значение решения дифференциального уравнения (2) в  $k$ -ой точке, если известно решение в предыдущих точках:  $k-1, k-2, k-3$ , а также известны производные решения в точках:  $k, k-1, k-2$ . Это уравнение имеет вид, характерный для многих неявных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Однако, в уравнении (9) значения коэффициентов отличаются

от соответствующих коэффициентов, входящих в выражения для известных методов [7].

Если в уравнении (2) ограничиться тремя членами полинома и в выражении (3) поставить условие для трех точек, то аналогичными рассуждениями получим еще одно выражение для численного метода интегрирования дифференциальных уравнений:

$$x_k = \frac{4}{5}x_{k-1} + \frac{1}{5}x_{k-2} + \left(\frac{4}{5}x'_{k-1} + \frac{2}{5}x'_k\right) \cdot h. \quad (10)$$

Для оценки погрешности предложенных методов определим локальную ошибку дискретизации по методу, изложенному в работе [6]. Для уравнения (10) локальная ошибка дискретизации в точке  $t$ , соответствующей номеру  $k-1$ , имеет вид:

$$L(t, h) = \frac{1}{h} \left\{ x(t+h) - \frac{4}{5}x(t) - \frac{1}{5}x(t-h) - \left(\frac{4}{5}x'(t) + \frac{2}{5}x'(t+h)\right) \cdot h \right\}. \quad (11)$$

Разложив каждый член правой части выражения (11) в ряд Тейлора в окрестности точки  $t$ , получим:

$$L(t, h) = \frac{1}{h} \left\{ x(t) + x'(t)h + x''(t)\frac{h^2}{2} + x'''(t)\frac{h^3}{6} + x^{(4)}(z_1)\frac{h^4}{24} - \frac{4}{5}x(t) - \frac{1}{5}\left[x(t) - x'(t)h + x''(t)\frac{h^2}{2} - x'''(t)\frac{h^3}{6} + x^{(4)}(z_2)\frac{h^4}{24}\right] - h\left[\frac{4}{5}x'(t) + \frac{2}{5}\left(x'(t) + x''(t)h + x'''(t)\frac{h^2}{2} + x^{(4)}(z_3)\frac{h^3}{6}\right)\right] \right\}, \quad (12)$$

где  $z_1, z_2, z_3$  – промежуточные точки, входящие в остаточные члены формулы Тейлора. Полагая, что четвертая производная решения ограничена, следует, что локальная ошибка дискретизации метода (10) имеет порядок величины  $h^3$ , то есть:

$$L(h) = \max|L(t, h)| = O(h^3). \quad (13)$$

Это свидетельствует о том, что предложенный метод (10) имеет третий порядок точности. Аналогично можно показать, что метод (9) имеет четвертый порядок точности, что соответствует лучшим известным методам [7].

Разработанные методы (9) и (10) встроены в программный комплекс моделирования электрических и магнитных цепей СОЛО [8], в котором ранее использовались только методы Гира. Практика использования разработанных методов показывает, что при их применении скорость компьютерного моделирования не уступает методам Гира. Программный комплекс СОЛО содержит аппарат поддержки автоматического выбора шага интегрирования. Если на текущем шаге ин-

тегрирования количество итераций в методе Ньютона превышает заданное число  $N_{it}$ , то шаг интегрирования делится пополам. Если же количество итераций меньше некоторого заданного значения  $N_{it}/D_{it}$  в течение заданного числа шагов  $N_{it2}$ , то шаг интегрирования увеличивается вдвое. При моделировании динамических процессов в нелинейных цепях с круто изменяемыми характеристиками предложенный метод показывает лучшую сходимость вычислительного процесса по сравнению с методами Гира.

Проиллюстрируем применение предложенных методов на примере моделирования динамических электромагнитных процессов при включении пятистержневого трехфазного трансформатора на номинальное напряжение. Конструкция и схема подключения трансформатора показаны на рис. 1. Первичные обмотки трансформатора соединены звездой, а вторичные – треугольником. Вторичные обмотки нагружены на сопротивления  $R_{46}, R_{47}, R_{48}$  большой величины (100 кОм), чтобы задать режим холостого хода. Для моделирования электромагнитных процессов магнитная система трансформатора задается схемой замещения, показанной на рис. 2. На схеме замещения каждый однофазный участок магнитопровода представлен своей ветвью, по которой протекает свой магнитный поток. Нелинейность магнитных ветвей учтена введением элементов  $R_n$  и  $E_n$ , как это обосновано в работе [8]. Катушки, по которым протекает электрический ток, исполняют роль источников магнитодвижущих сил (МДС), управляемых током. Источники МДС обозначены на схеме так же, как источники ЭДС.

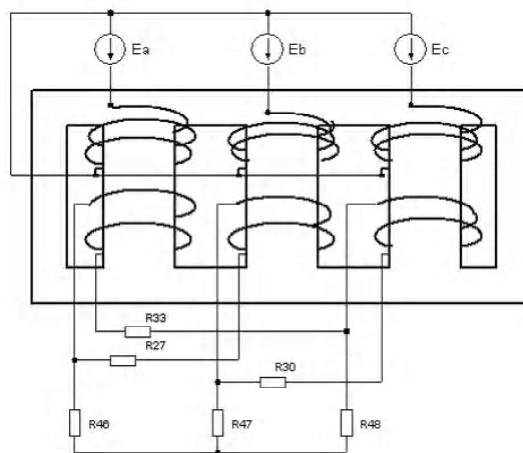


Рис. 1. Схема подключения трансформатора

Первичная и вторичная обмотки трансформатора представлены схемами замещения, изображенными на рис. 3 и рис. 4. Электродвижущие силы, индуцируемые в обмотках, представлены источниками ЭДС, управляемыми производной соответствующих магнитных потоков. Для получения производных магнитных потоков служат дифференцирующие цепочки, показанные на рис. 5. При этом совокупность цепей, показанных на рис. 2–рис. 5, рассматривается как единая цепь, в ветвях которой протекают электрические токи или магнитные потоки. Поскольку, с точки зрения вычислений, токи и магнитные потоки совершенно равнозначны, то все они на схемах замещения обозначены одним символом «i» с соответствующим номером.

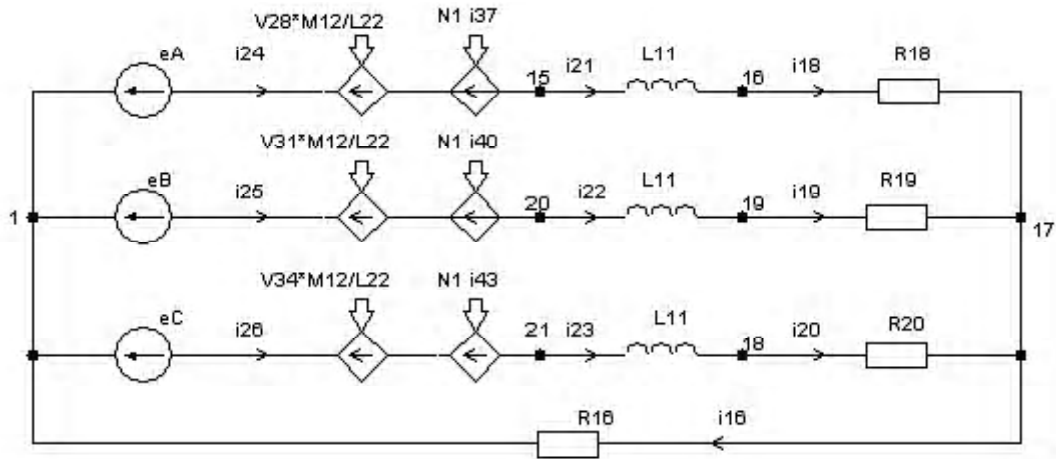


Рис. 2. Схема замещения первичной обмотки трансформатора с подключенным трехфазным генератором ЭДС

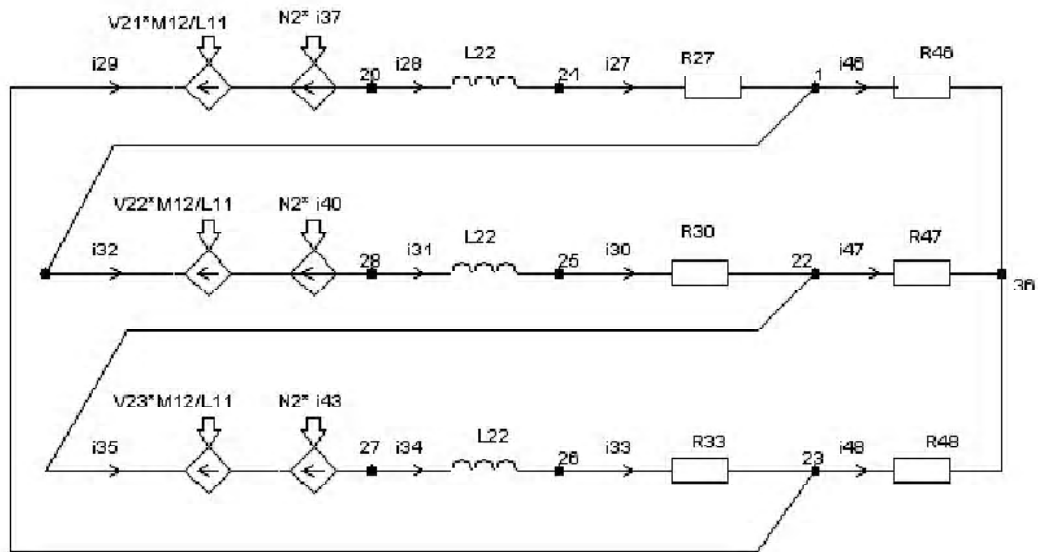


Рис. 3. Схема замещения вторичной обмотки трансформатора с подключенной нагрузкой

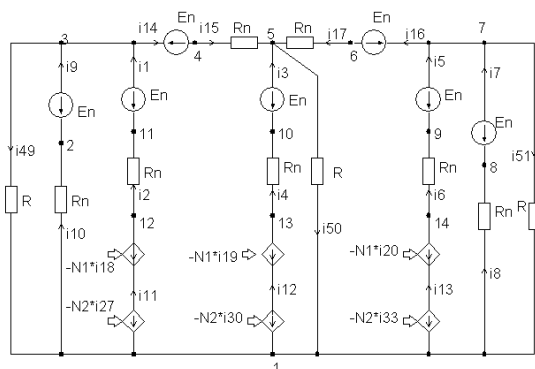


Рис. 4. Схема замещения магнитной системы трансформатора

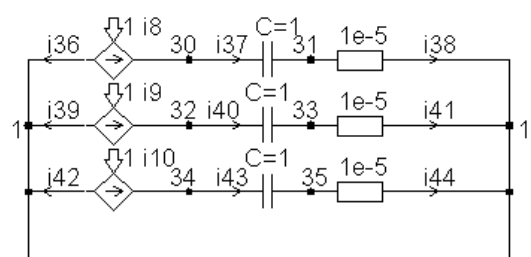


Рис. 5. Схема дифференцирующих цепочек

На рис. 6 показаны результаты моделирования динамических процессов рассмотренного трехфазного трансформатора, полученные с помощью программного комплекса COLO (снабженного решателем, разработанным на основе предложенных методов).

### Выводы

1. Сравнение результатов расчета, проведенных комплексом COLO с решателями, выполненными на основе методов Гира и на основе предложенных методов, показали их хорошее взаимное совпадение (с точностью до десятых долей процента).
2. Однако, при использовании предложенных методов скорость расчета увеличена почти в полтора раза (за счет более быстрой сходимости итерационных процессов).

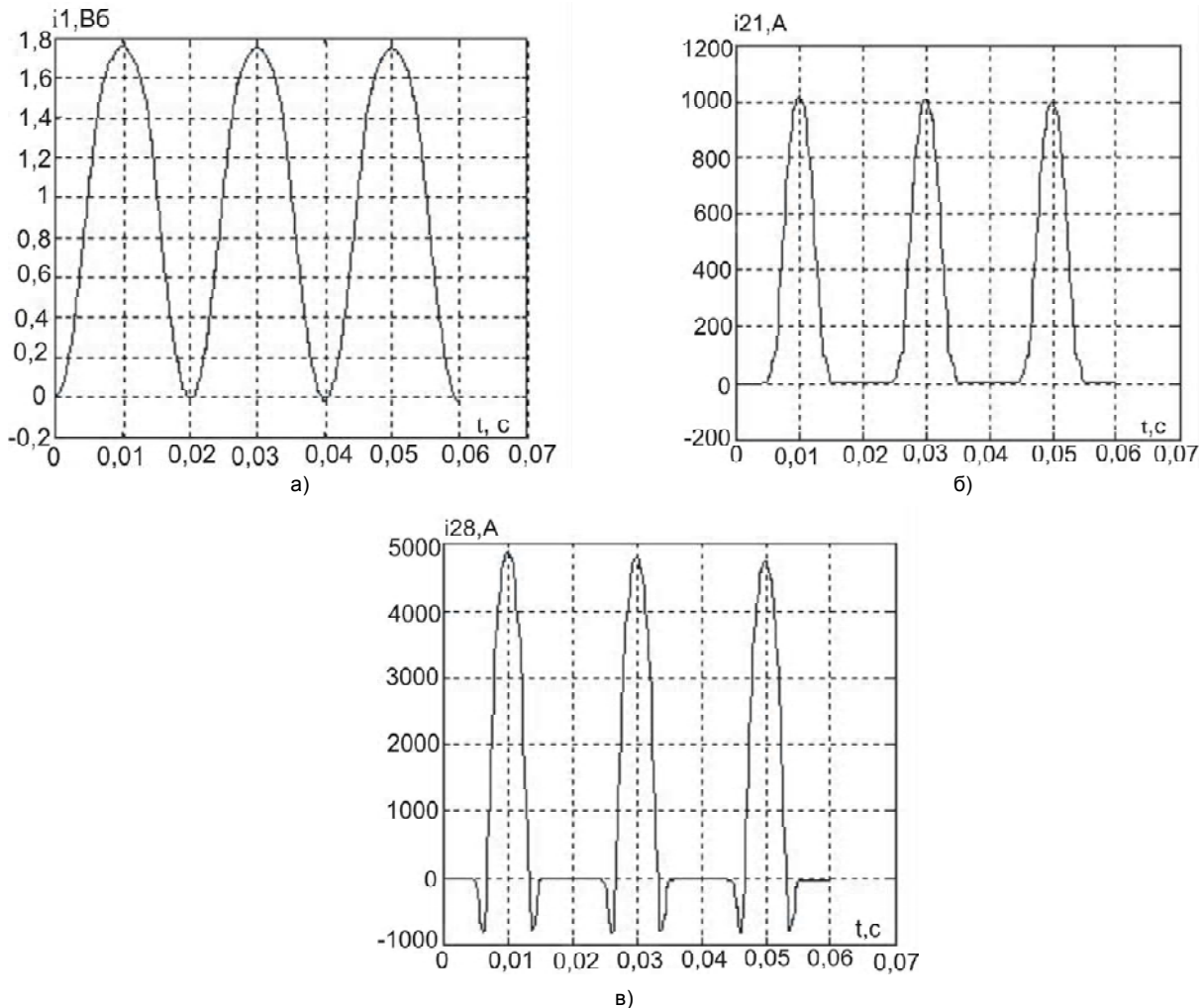


Рис. 6. Графики результатов моделирования электромагнитных процессов после включения трансформатора: а) магнитный поток в стержне фазы «А»; б) ток первичной обмотки фазы «А»; в) ток вторичной обмотки фазы «А»

3. Усовершенствованные методы могут быть основой для создания решателей новых САЕ-систем.

**Перечень ссылок**

1. Lindberg E. NAP2 and SPICE2. A short form users manual. <http://www.it.dtu.dk/~el/ecs/nap2spi2.htm>
2. Разевиг В.Д. Система проектирования OrCAD 9.2.– М.: Солон-Р, 2001. – 519 с.
3. Герман-Галкин С. Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем. MatLab 6.0.– СПб.:Корона, 2001.– 320 с.
4. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. – 528 с.
5. Тиховод С. М., Корнус Т. М., Паук Ю. И., Тарчуткин А. Л. Разработка алгоритма и программы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях // Электротехника та електроенергетика 2003. – № 1. – С. 75–79.
6. Дж. Ортега, У. Пулл. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1986. – 288 с.
7. Чуа Л. О., Пен – Мин – Лин. Машинный анализ электронных схем. М.: Энергия, 1980. – 640 с.
8. Тиховод С.М., Моделирование динамических электромагнитных процессов в трансформаторе с современной электротехнической статьёю // Электротехніка та електроенергетика. – 2006. – № 1. – С. 37–41.

Поступила в редакцию 21.05.07 г.

*Розроблені вдосконалені методи чисельного інтегрування систем диференціальних рівнянь, які призначені для моделювання динамічних електромагнітних процесів в електричних і магнітних колах Дані методи упроваджені в універсальний програмний комплекс COLO, за допомогою якого виконаний приклад розрахунку перехідних процесів в трифазному трансформаторі.*

*The numerical integration methods of the differential equations system for modelling of dynamic electromagnetic processes in electrical and magnetic circuits are developed. The given methods are applied to the universal programme complex COLO with the help of which the instance of a transient analysis in the three-phase transformer is carried out.*